Azar, arte y computadoras

Las matemáticas y el caos

◆

José Antonio de la Peña

Pequeños cambios, grandes consecuencias

[Jacques] Mi capitán solía decir: "Dada una causa, un efecto le seguirá; de una causa débil, un efecto débil; de una causa momentánea, un efecto de un momento; de una causa intermitente, un efecto intermitente; de una causa que termina, un efecto que se detiene."
[Amo] Pero me parece que siento dentro de mí mismo que soy libre, de la misma forma que siento que pienso.
[J.] Mi capitán decía: "Sí, en este momento que no quieres nada; pero, ¿querrías caerte de tu caballo?"
[A.] ¡Y bien! si quisiera, me caería.
[J.] ¿Con gusto y sin vacilar?, ¿como al entrar por la puerta de una casa?
[A.] No exactamente; pero, ¿cuál es la diferencia, si cayendo del caballo demuestro que soy libre?
[J.] Mi capitán diría: "¡Qué!, ¿no te das cuenta de que sin mi provocación no se te hubiera ocurrido nunca romperte el cuello? Soy por tanto yo el que toma del pie y te arroja de la silla..."

Diderot: *Jacques le fataliste et son maitre*

La nariz de Cleopatra: si hubiera sido más pequeña, el aspecto entero del mundo habría cambiado.

Blaise Pascal: *Pensées*

En 1958, Isaac Asimov escribió un cuento que retomaba la clásica historia del Doctor Fausto vendiendo su alma al diablo. El doctor Marshall Zebatinski, un físico más bien mediocre, con un empleo de segunda categoría en un laboratorio norteamericano, se lamenta de no ser un científico de renombre. Un desconocido le ofrece cumplir su deseo anhelado si sólo cambia una letra de su nombre: la *Z* por una *S*. Tras grandes esfuerzos y dificultades con la burocracia, el físico de la historia logra convertirse formalmente en Marshall Sebatinski. Unos meses después recibe el ofrecimiento de un puesto de primer nivel en una importante universidad, volviendo realidad sus sueños.

Por supuesto, hay una parte oculta para Zebatinski. La petición de cambio de nombre pareció sospechosa a la burocracia: entenderían que quisiera cambiar su extraño nombre por otro más sencillo como Smith (que también se escribe con *S*), pero sólo una letra, era para pensarse. Informado de esta situación, el FBI toma cartas en el asunto y comienza a investigar. Rastreando el apellido, sus agentes en la Unión Soviética descubren que en los últimos meses varios físicos que trabajaban en el mismo campo (aparentemente sin importancia) de Zebatinski han desaparecido. La conclusión no tarda en llegar. La Unión Soviética ha descubierto una importante aplicación de los estudios de estos científicos y los ha reclutado para un proyecto importante. Los Estados Unidos deben contratar en sus mejores centros a los expertos en esta área para no quedar atrás en los posibles nuevos avances. Las investigaciones en los Estados Unidos y de espionaje del FBI descubren los preparativos de guerra de la Unión Soviética y logran evitar la tercera Guerra Mundial.

En el desenlace de la historia, nos enteramos de que el "demonio" que visitó al ahora doctor Sebatinski es en realidad un extraterrestre que había hecho una apuesta con un amigo: tenía que conseguir que sucediera algo trascendental en la tierra (evitar su destrucción por una guerra, por ejemplo), haciendo sólo una pequeña cosa sin importancia aparente (el cambio de *Z* por *S*). Reconociendo su derrota, el extraterrestre perdedor hace a su amigo una segunda apuesta; propone deshacer lo conseguido y lograr la destrucción del planeta por medio de otra acción menor. La apuesta es aceptada y el cuento termina.

Lo que la historia nos muestra es que en ciertas ocasiones, pequeñas modificaciones de las circunstancias pueden acarrear importantes cambios. Vista la historia desde la perspectiva de Zebatinski, es una afortunada casualidad que las universidades se interesen repentinamente por su campo de trabajo. En realidad no hubo ninguna casualidad. Su pequeña acción consistente en modificar su nombre desencadenó una serie de cambios cada vez de mayor importancia; cada paso era perfectamente controlado por las leyes de los intereses norteamericanos y soviéticos en juego. En matemáticas diríamos que estamos frente a un fenómeno de *inestabilidad exponencial*.

Tendemos a suponer que pequeños cambios en las circunstancias que rodean a un fenómeno o situación que acontece en la realidad acarrea pequeñas consecuencias. Si empujamos con la mano un automóvil en el momento que arranca, esperamos que el efecto sea mínimo e insignificante, no que el coche salga de su curso y vaya a estrellarse a la acera de enfrente. Pero las cosas no son siempre tan simples. En meteorología se sabe que la magnitud de una perturbación atmosférica se duplica cada tres días, en caso de que nada se interponga en su desarrollo. Esto quiere decir que si en este momento agito un abanico, la perturbación atmosférica que produzco (ciertamente no muy grande), se verá multiplicada por dos en tres días y por $2^{10} = 1\,024$ veces en un mes. Dentro de un año se verá multiplicada 10^{36} veces, lo que probablemente será sentido como un ciclón en alguna parte del planeta. Este efecto, conocido como el *efecto mariposa*, resulta un tanto extraño a nuestra experiencia. En realidad, no tenemos que cuidarnos de estornudar para no producir tornados en otros países. Esto es así por varias causas. Por una parte, hemos dicho que la perturbación se duplicaría en tres días de no haber nada que se interponga en su camino, y por supuesto, hay muchas mariposas, estornudos y tornados que sí lo hacen. Por otra parte, no poseemos los recursos que nos permitan medir el efecto que tendrá dentro de varios días o meses la perturbación atmosférica que producimos. Sin embargo, en circunstancias especiales y aunque no nos demos cuenta de ello, un pequeño cambio de *Z* por *S* puede salvar al mundo... o destruirlo.

Si queremos ver más de cerca el fenómeno de la inestabilidad exponencial, proponemos al lector el siguiente juego de salón. Puede participar cualquier número de jugadores y se requiere solamente una hoja de papel, lápiz y una regla graduada. En la hoja se tiene dibujado un triángulo equilátero y al comenzar cada jugador marca un punto dentro del triángulo. En el primer turno del juego, cada jugador marca el punto que se obtiene de duplicar la distancia entre su punto original y el vértice más cercano del triángulo. En el siguiente turno, se repite el procedimiento

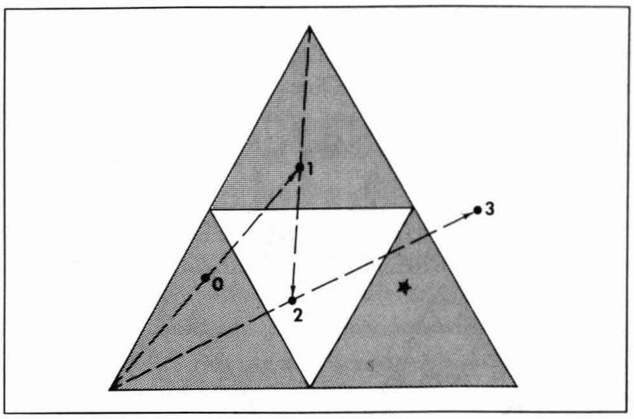

Figura 1

duplicando la distancia entre el punto obtenido en el primer turno y el vértice más cercano del triángulo. Y así sucesivamente. Gana el jugador que tarde más tiempo en sacar un punto del interior del triángulo (figura 1). Si el lector practica un poco este juego descubrirá que puede participar con puntos muy cercanos entre sí, uno de los cuales requiere de muchas jugadas para salir del triángulo, mientras que el otro está fuera después de un par. Tenemos aquí un ejemplo de un proceso donde pequeñas alteraciones de la posición inicial nos llevan a grandes consecuencias (no hay que apostar a ganar en este juego). Sin embargo, el juego de ninguna manera está regido por el azar; por el contrario, está determinado por una sencilla regla matemática. ¿Hay alguna manera de ganar siempre en este juego? Sí, de hecho hay una cantidad infinita de puntos ganadores, esto es, puntos que sin importar cuántas jugadas se hagan, siempre se quedan dentro del triángulo. Pero al mismo tiempo hay muy pocos de estos puntos en comparación con la cantidad de puntos perdedores: si elegimos un punto al azar, ¡la probabilidad de que sea un punto ganador es cero! En la figura 2, vemos cómo obtener los puntos ganadores: de un triángulo equilátero hay que eliminar el triángulo invertido que se forma al unir los puntos medios de los lados de aquél; de esta forma tenemos tres triángulos sobrevivientes. Luego eliminamos los triángulos formados con los puntos medios de los tres triángulos sobrevivientes del primer paso. Con esto nos quedan nueve triángulos cada uno de los cuales tiene lados que equivalen a la cuarta parte de los del triángulo original. Luego... continuamos este proceso hasta el infinito.

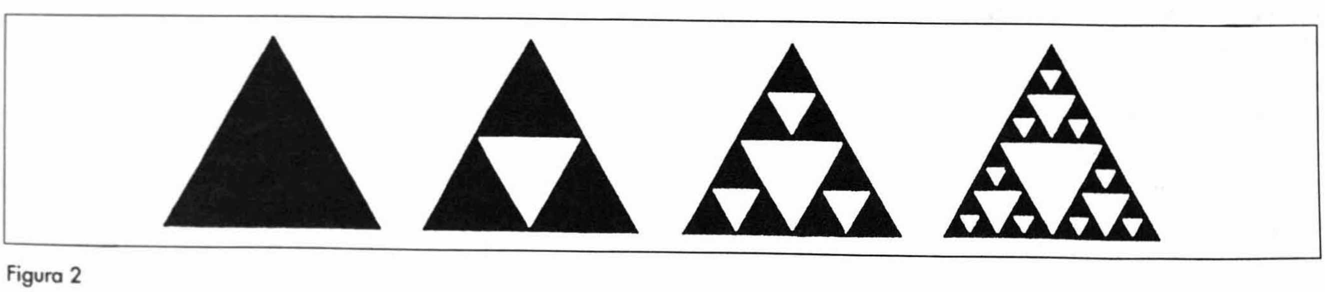

Figura 2

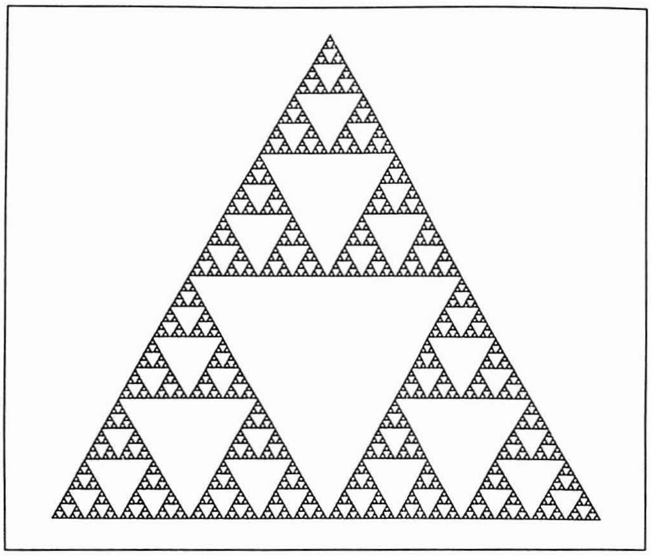

Figura 3

Lo que nos queda, se conoce como la criba de Sierpinski y aunque realmente no se puede dibujar se parece a la figura 3, donde los puntos ganadores del juego se encuentran en las áreas negras.

Como veremos después, hay muchas más fuentes de inestabilidad exponencial de las que en principio esperamos. Algunas las sospechamos intuitivamente, por ejemplo, el comportamiento (caótico) de la economía. En este sentido recordamos la última predicción de E. F. Hutton, una importante firma en Wall Street, el 19 de octubre de 1987, momentos antes de la caída de la bolsa: "la visibilidad y el impulso que llevan las ganancias deberán seguir propulsando el mercado a nuevas alturas". (Por supuesto, hay muchos ejemplos locales de este tipo de declaraciones.)

Un rápido vistazo al desarrollo de la noción de caos. De la intuición matemática a las computadoras

Una causa muy pequeña que escapa a nuestra percepción determina efectos considerables que no pueden escapársele a nuestra vista, y entonces decimos que el efecto se debe al azar.

Henri Poincaré: *Ciencia y método*

Desde hace tiempo se sabe que estudiar los fenómenos exponencialmente inestables resulta una tarea difícil. El texto citado anteriormente fue escrito en 1908. En ese tiempo, científicos como el matemático Poincaré y el físico James Clerk Maxwell se daban cuenta de que había fenómenos tan especialmente sensibles a los cambios de las condiciones iniciales que era más fácil para la gente pensar que las consecuencias visibles eran producto del azar. La investigación matemática indicaba, por el contrario, que sistemas gobernados por leyes físicas pueden manifestar cambios de manera irregular y difícil de predecir; una situación que ahora se denomina de *caos*.

Mucho del trabajo de Poincaré se centró en comprender fenómenos cuyo comportamiento era caótico. Un ejemplo notable de inestabilidad que Poincaré estudió es el movimiento en el espacio de tres cuerpos que se atraen mutuamente. Fue en este problema que Poincaré advirtió que la mecánica newtoniana dejaba amplio espacio a la impredictibilidad, y que la cuestión de la estabilidad de un sistema no podía determinarse estudiando las series divergentes asociadas a la solución de las ecuaciones de movimiento. A pesar de sus esfuerzos, Poincaré no logró demostrar que el sistema solar se encuentre en movimiento caótico. Si bien este problema no ha sido aún resuelto, se sabe que una variación de un metro de la posición de la tierra puede ocasionar que al cabo de cien millones de años se modifique esta posición hasta en un millón de kilómetros. Esto nos habla de que probablemente la órbita terrestre sea inestable (pero también muestra que todavía no tenemos por qué preocuparnos).

El método de Newton para calcular soluciones de ecuaciones polinomiales es bien conocido por estudiantes de carreras científicas. Dada una ecuación como $x^2 + x = 6$, sabemos que tiene dos soluciones que son fáciles de calcular: 2 y -3. Supongamos por un momento que no conocemos la solución 2 pero deseamos obtener una aproximación por el método de Newton. Comenzamos por una aproximación, digamos $z_0 = 1$; con ella calculamos la segunda aproximación como el resultado de sustituir z_0 en la expresión $x^2 + x + 6/2x + 1$, ésta es $z_1 = 2.63$. Repitiendo el proceso obtenemos: $z_2 = 1.86$, $z_3 = 2.38$,... y así hasta obtener una aproximación con el grado de precisión deseado. Alrededor de 1880, el matemático inglés Arthur Cayley notó que había problemas con la aplicación del método de Newton: algunas aproximaciones no parecían converger, otras se mantenían oscilando entre ciertos valores que no eran soluciones de la ecuación y en otros casos las iteraciones daban números que parecían completamente aleatorios. A principios de siglo, los matemáticos franceses Julia y Fatou, mostraron que en realidad el comportamiento de las sucesivas aproximaciones por el método de Newton era sorprendentemente complicado. Pero no fue sino hasta la llegada de las computadoras cuando toda la complejidad del problema se puso de manifiesto. En la figura 4, vemos en diferentes tonalidades las regiones del plano complejo en que los números convergen en cada una de las diferentes raíces de la ecuación $x^4 - 1 = 0$.

En 1963, un meteorólogo del Instituto Tecnológico de Massachusetts, Eduard Lorenz, estudió un sistema de ecuaciones diferenciales que describen flujos de aire en la atmósfera. El sistema es de una sencillez pasmosa; en tres dimensiones tomaría el siguiente aspecto:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = z + xy$$

Figura 4

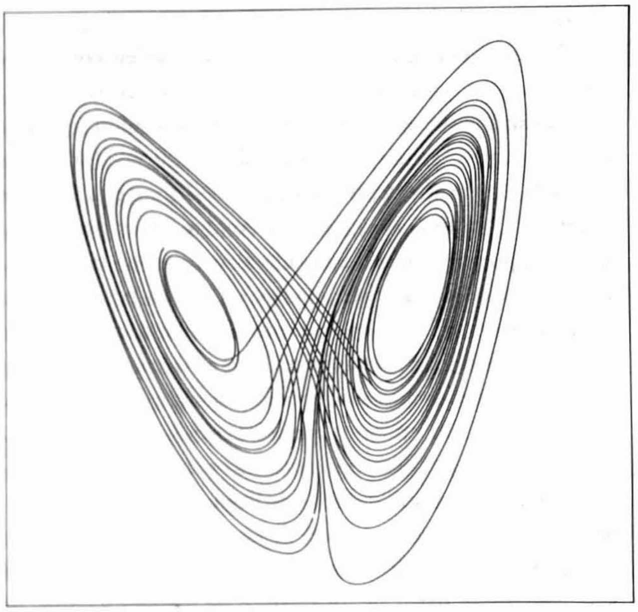

Figura 5

Dada una solución de la ecuación para el tiempo $t = 0$, podemos seguir la trayectoria de las soluciones en el tiempo. Típicamente lo que resulta es similar a la figura 5, que se conoce como un *atractor de Lorenz*. Aquí tenemos toda la fenomenología del problema del estudio del clima: al pasar la trayectoria por determinados puntos, lo mismo repite un ciclo casi igual al que venía dando, que realiza un repentino giro y se aleja para girar alrededor de otro centro.

Antes del advenimiento de las computadoras, para estudiar un sistema de ecuaciones como los que describen la dinámica de un fluido se contaba con algunos métodos que en ocasiones resultaban tremendamente laboriosos. Para visualizar el desarrollo del sistema en el tiempo, podían obtenerse soluciones parciales que sólo son válidas en intervalos pequeños de tiempo (para intervalos largos se pueden calcular las soluciones sólo para los llamados sistemas integrables). Con la llegada de las computadoras fue posible comenzar a resolver las ecuaciones por métodos numéricos que antes hubieran requerido de vidas enteras para llevarse a cabo. Con ello, hacer simulaciones del movimiento de los sistemas (aire, agua, planetas...) se ha convertido en una actividad cotidiana para muchos especialistas. Por otra parte, el estudio de objetos matemáticos como las aproximaciones por el método de Newton, los conjuntos de Julia y otros han tomado una nueva dimensión al pasar de ser objetos teóricos a ser objetos visibles. Las computadoras asumen en estos casos el papel de un poderoso microscopio que puede acercarnos y amplificar el objeto matemático estudiado, sin importar qué tan pequeña sea la región que nos ocupe.

Arte, caos y autosimilitud

Las nubes no son esféricas, las montañas no son conos, las costas no son circulares y los relámpagos no viajan en líneas rectas.

Benoit Mandelbrot

En 1984, durante una visita a una universidad alemana, me tocó en suerte ver una exposición de cuadros producidos por computadora por un grupo de matemáticos alemanes (los ahora famosos H.-O. Peitgen, R. Richter y colaboradores). No siendo nuestra área de trabajo los sistemas dinámicos, ni yo ni las personas que me mostraron la exposición sabíamos con precisión de qué se trataba (desde el punto de vista matemático). Esta exposición circuló por las bibliotecas de universidades alemanas por algunos meses y poco después comenzó a ser solicitada por museos de arte. En efecto, algunos de los cuadros eran extraños, pero visualmente muy atractivos; otros representaban paisajes de tierras y lunas en una forma muy realista. Al poco tiempo, los *fractales* y sus imágenes generadas por computadora eran conocidos y apreciados por los más diversos públicos en todo el mundo.

La noción central que subyace al concepto de fractal es la de autosimilitud. Veamos una nube en el cielo. Seguramente tiene una forma complicada y un perfil distinguible. Observemos ahora sólo una pequeña porción de la nube. Sin duda la forma de este "pedazo de nube" es diferente a la de la nube completa, pero sin duda también nos percatamos inmediatamente que se trata de una nube. Lo mismo sucede con una montaña: una porción de una montaña, si bien es diferente y distinguible de la montaña original completa, es "parecida" a ella. Y esto pasa con las costas de los continentes en la tierra, los relámpagos en el cielo, el perfil de los árboles del bosque. Esta importante observación fue primeramente formulada por Benoit Mandelbrot en 1975 mientras trabajaba para los laboratorios de la IBM. Su libro: *La geometría fractal de la naturaleza* ha influido en muchas formas el pensamiento científico de los últimos años.

Parte de los dibujos generados por computadora de la exposición alemana desarrollaba en pequeñas regiones del plano complejo la apariencia que toma el llamado *conjunto de Mandelbrot*, que se obtiene estudiando la convergencia de una función cuadrática, en forma parecida a como se hace con el método de Newton. Otra parte de los cuadros usaba iteraciones de otras funciones igualmente simples para obtener las apariencias de tierras, nubes, aguas en planetas y lunas extrañas. El que ambos tipos de cuadros se obtengan con los mismos métodos se debe al hecho de que los fenómenos caóticos presentan aspectos de autosimilitud: si acercamos un microscopio (estos es, si usamos nuestra computadora a manera de microscopio) a una región fronteriza de los diagramas obtenidos por medio del método de Newton, o en el conjunto de Mandelbrot, veremos que la imagen obtenida es parecida (aunque sin duda no igual) a la imagen original. Lo mismo que sucede con las nubes y las montañas.

La idea de autosimilitud ya había sido explotada en el arte. Como lo hace notar Douglas Hofstadter en su libro *Gödel, Escher y Bach*, las nociones de repetición controlada y la autorreferencia son elementos centrales en muchas de las obras musicales de Bach (basta pensar en los cánones y las fugas) y en los grabados de Escher. Un aspecto que me parece interesante es que este libro fue escrito en 1979, años antes que comenzara la gran moda de los fractales.

El problema de la conciencia en las computadoras

¡Oh, Dios!, si hay un Dios, por favor salva mi alma, si tengo un alma.

Ernest Renan: *Prière d'un sceptique*

En el párrafo anterior aparece como de pasada el nombre del matemático austriaco Kurt Gödel. A grandes rasgos diremos que su contribución más importante fue demostrar que ningún sistema lógico de axiomas que sea consistente puede ser completo. Dicho de otra manera, dada una máquina computadora cualquiera (real o imaginaria), siempre habrá preguntas de aritmética que la máquina no pueda contestar. Para la demostración de su teorema, Gödel construye afirmaciones matemáticas que hacen referencia a sí mismas (y aquí el porqué de que su nombre aparezca junto con el de Escher y Bach en el libro mencionado). El Teorema de Gödel es una pieza clave del pensamiento lógico actual y ha tenido importantes repercusiones en filosofía y teoría del conocimiento. Baste decir que su demostración derrumbó en forma definitiva la esperanza que los matemáticos habían guardado, desde los tiempos de la Grecia clásica, de que las matemáticas pudieran axiomatizarse, es decir, que se pudiese encontrar una serie de postulados básicos, a partir de los cuales y siguiendo las reglas de la lógica, se derivaran todos y cada uno de los teoremas de las matemáticas.

Pero, ¿hay alguna relación entre el Teorema de Gödel y nuestras consideraciones sobre el caos? Sí; la hay. El Teorema de Gödel permite construir un "caos perfecto": por medio de propiedades de los números enteros se puede definir una sucesión de números binarios $(a_n)_n$, de forma que independientemente del valor que han tomado las cifras $a_1 \ldots a_n$, el número a_{n+1} de la sucesión tiene 50% de probabilidades de ser 0 y 50% de probabilidades de ser 1 (esta sucesión fue definida por G. Chaitin). Esto significa que a pesar de estar perfectamente determinada esta sucesión por propiedades aritméticas, el siguiente número de la sucesión no puede anticiparse por mayores cálculos que se realicen. Por supuesto, esta sucesión es, en la práctica, incalculable.

El Teorema de Gödel está vinculado al vago problema metafísico resumido en la siguiente pregunta: ¿pueden las máquinas pensar? Más claramente: ¿puede construirse un dispositivo automático que sea inteligente?; ¿que tenga conciencia? Este problema fue planteado desde muchos años antes de la construcción de las primeras computadoras. Las discusiones se empantanaban en las definiciones de lo que se entiende por inteligencia, por pensar, o por tener una conciencia. Con la intención de acabar definitivamente con este nivel de discusiones, el matemático inglés Alan Turing, en 1950, propuso el siguiente juego: una persona debe interrogar a *A* y *B*; uno de los sujetos interrogados es un ser humano; el otro, una máquina. ¿Puede el interrogador distinguirlos? (por supuesto, las preguntas pueden contestarse por escrito y no hay ninguna obligación de decir la verdad).

La enorme ventaja de este enfoque es: no me interesa saber lo que es la inteligencia, me basta saber si puedo distinguirla cuando la tengo enfrente. El argumento de Turing establece que la distinción entre la máquina y el hombre no es posible (en principio, pues aún no se ha llegado a este nivel en las computadoras construidas). Es decir, no hay razón para pensar que no pueda construirse una máquina capaz de imitar completamente la conversación, comportamiento y, aun, la expresión de las emociones de un ser humano. Si una máquina así existiera, ¿qué evitaría que pensáramos que tiene conciencia?

Al parecer hay una opinión más o menos generalizada que acepta la posibilidad de que lleguen a existir máquinas que imiten y mejoren cualquiera de las funciones desarrolladas por el ser humano. Estos robots serán entes pensantes que evolucionaron a partir de un sustrato de metales y chips, de la misma manera como pensamos que evolucionaron los seres humanos a partir de un sustrato de aminoácidos. Las funciones básicas de crecer, alimentarse y reproducirse serán llevadas a cabo en forma distinta de como las efectúa la especie humana, pero sin duda se realizarán. En lo que parece que el acuerdo no es unánime es en lo que se refiere a la conciencia de estos robots. La conciencia, entendida como el sentido de ser, de tener una identidad.

Varios argumentos sólidos en favor y en contra de si las máquinas tendrán conciencia pasan por el Teorema de Gödel. Roger Penrose, en su más reciente libro *Shadows of the Mind*, argumenta que las computadoras no pueden tener conciencia. Su argumento se vale de una versión del Teorema de Gödel que se refiere a la imposibilidad de construir un algoritmo (esto es, una máquina) que pueda decidir si dada otra máquina cualquiera y un problema, esta segunda máquina puede resolver el problema. Su conclusión es que los matemáticos humanos no usan ningún algoritmo para determinar la verdad matemática. Hasta aquí todo está claro. Después, su argumento continúa para negar la posibilidad de conciencia en las máquinas, al menos en la forma en que las concebimos actualmente.

Es interesante notar que Gödel mismo observaba (en una conferencia en 1951 —citado por Hao Wang en 1974—) lo siguiente:

1) La mente humana es incapaz de mecanizar todas sus intuiciones matemáticas.

2) Hasta donde ha sido demostrado, es posible que exista una máquina que demuestre teoremas y que sea equivalente a la intuición matemática, pero que nunca pueda demostrarse que esto es así.

En primer lugar observemos que la primera afirmación está en completo acuerdo con los argumentos de Penrose. La segunda afirmación parece contradecir los argumentos (matemáticos) que Penrose ofrece en su libro. Me parece que la solución de este problema está en lo siguiente: el argumento de Penrose señala que todo lo que puede ser teóricamente demostrado por un matemático humano, debe ser demostrado por una máquina equivalente; la aseveración del punto 2 de Gödel permite suponer que hay afirmaciones verdaderas (y en principio demostrables para un ser humano), que en la práctica no pueden ser demostradas (y por lo tanto, tampoco pueden serlo por el equivalente mecánico). Este enfoque permite dejar abierta la posibilidad de la conciencia en las máquinas.

Para mecanicistas como Turing la conciencia es simplemente una consecuencia de la existencia. Si quitamos el cuerpo (el *hardware* del ser humano) y los pensamientos (el *software*), ¿qué queda? Para el mecanicista, no queda nada; lo que algunos llamarían conciencia (o alma), es una consecuencia implícita de la interacción y funcionamiento del cuerpo y la mente. Tal vez, dice Penrose, es el caos lo que dará la respuesta al misterio de la conciencia.

Los dados y Dios

Lo que realmente me interesa saber es si Dios tuvo la posibilidad de elegir durante la creación del mundo.

Albert Einstein

[Mortal] Te pido, Dios mío, que si tienes una onza de piedad por esta criatura sufriente, me absuelvas de tener libre albedrío.
[Dios] ¿Rechazas el más grande don que te he dado?
[M.] ¿Cómo puedes llamar a esto que me fue impuesto, un don? Si tengo libre albedrío, no fue mi elección. Nunca elegí libremente si quería tenerlo.

R. Smullyan: *Is God a Taoist?*

La discusión de la conciencia de las máquinas parece habernos llevado un poco lejos de nuestro asunto central y a campos especulativos. Sin embargo, el asunto de la conciencia de las computadoras está en el centro de varias preguntas importantes: ¿pueden las estructuras volverse más complejas indefinidamente?; ¿pueden crearse estructuras automáticas cuya complejidad, cada vez mayor, las haga seguir leyes propias, como en el mundo biológico o en las sociedades humanas?

Conforme crece nuestra comprensión de los fenómenos de la naturaleza, todo parece indicar que el comportamiento de sistemas (naturales) de un cierto nivel de complejidad es caótico (o fractal en el sentido de Mandelbrot). Luego, es claro que nuestro entendimiento de los mecanismos del pensamiento y la conciencia tendrá que pasar por su comprensión como fenómenos caóticos. Por supuesto, una mejor captación de estos fenómenos nos llevará a reconsiderar las diferentes posiciones sobre la conciencia humana y el libre albedrío.

Aquí uno se topa con el eterno problema de cómo puede el libre albedrío coexistir con un universo determinista. Probablemente, la solución es que el libre albedrío está en la conciencia (en los sentimientos) de la persona, no en los "ojos de Dios". En tanto una persona se siente libre, es libre. Como Dios lo explica (a través de la pluma de Raymond Smullyan, del que tomamos la cita) en su diálogo con el Mortal:

> Te preguntas por qué elegí crearte con libre albedrío. Nunca se te ocurrió pensar que un ser pensante sin libre albedrío no es más concebible que un objeto físico que no ejerce atracción gravitacional... Tal vez piensas que tengo una brocha con la cual doto a algunos seres de libertad y a otros no. No, el libre albedrío no es un "extra"; es parte de la esencia misma de la conciencia.

Probablemente la explicación de la libertad interna del individuo está en la naturaleza caótica de sus procesos internos. Aunque hubiese una teoría que predijera perfectamente lo que va a hacer (y querer), nadie podría calcular esto con eficiencia y hacer el pronóstico a tiempo. Si Dios lo puede saber, es un asunto que no es claro para nosotros; después de todo, Dios no puede hacer cosas imposibles.

Cuando Einstein decía que no creía que Dios jugara a los dados con el universo, no sabía lo profundamente equivocado que estaba. La naturaleza se comporta precisamente como jugando a los dados (el juego de dados es un ejemplo paradigmático de caos: claramente los dados se rigen por unas cuantas leyes físicas que sin embargo son tan sensibles a las condiciones iniciales del sistema que hacen altamente difícil la predicción del resultado). De hecho, es posible que una computadora extremadamente rápida pudiera registrar los datos de las condiciones del juego y predecir con alguna eficiencia los resultados que arrojaría un juego de dados; por tanto, es posible suponer que Dios también podría hacerlo. Por ello, proponemos mejor pensar que Dios maneja el universo siguiendo el valor de los términos de una sucesión construida por Chaitin de acuerdo al Teorema de Gödel. En este caso creemos que ni Dios puede predecir el resultado. ◆