El caos: un fenómeno persistente dentro de los sistemas dinámicos

◆

XAVIER GÓMEZ-MONT

Un sistema evoluciona con orden si puntos cercanos de éste comparten el mismo "destino", es decir, si una pequeña variación en la condición inicial no afecta de modo sensible la evolución de esos puntos. Un sistema evoluciona con caos si puntos arbitrariamente próximos del mismo tienen "destinos" por completo diferentes. El caos es persistente si permanece al producir pequeñas perturbaciones en el sistema original. La existencia de sistemas caóticos persistentes en la naturaleza y en la matemática es un hecho.

Muchos sistemas comprenden una gran parte donde la dinámica evoluciona con orden y, a la vez, otra con caos. Predecir el comportamiento con precisión resulta posible en la parte donde hay orden; en cambio hay una alta probabilidad de equivocarse si se desea hacer un pronóstico respecto de la parte caótica. Esto exige que entendamos la dinámica caótica como un todo, no como el destino individual de sus puntos.

En este artículo explicaremos cómo se modela el movimiento y luego mostraremos un sistema caótico donde se aprecia claramente el caos.

1. La modelación del movimiento

El gran triunfo de Isaac Newton (1642-1727) consistió en mostrarnos la manera de modelar matemáticamente el movimiento. La idea es muy sencilla: *para describir el movimiento basta conocer la "tendencia de este movimiento" en cada uno de sus puntos.*

Ilustremos con un ejemplo tal noción. Supóngase que se conoce la velocidad del viento en la península de Yucatán en un momento dado y que el viento se mantiene soplando de forma constante durante una hora. Luego de soltar un planeador sobre Cozumel, queremos saber su trayectoria durante una hora. En la figura 1 describimos un "campo de velocidades": las flechas indican la dirección y la magnitud de la velocidad de la partícula ubicada en la base de la flecha. Las líneas continuas describen la trayectoria de diferentes planeadores al salir de distintas posiciones al fluir ante este campo de velocidades. El sistema dinámico es el fluir del aire, que tiene la velocidad especificada por el *campo de velocidades* dado.

A partir de lo establecido por Newton, conocer las velocidades del viento en cada punto de la península de Yucatán es información suficiente para describir cómo fluye el aire en la zona. De hecho, es una forma muy compacta de describir todo el flujo de aire, al especificar tan sólo la velocidad en cada punto. Pero esta "poca información" es suficiente para poder deducir de ella todo el flujo.

La potencia de las matemáticas radica en su poder de abstracción: un fenómeno que entendemos muy bien, si abstraemos su esencia, lo vamos a entender igualmente bien, así como otros hechos enmarcados dentro de tal abstracción. Es decir, si en lugar de la península de Yucatán, decimos que U es un "espacio" (el valle de México o unas variables de naturaleza económica, ecológica, física, etcétera), allí un "campo de velocidades" nos señala cuál es la "tendencia" de los puntos de U a moverse. Esta tendencia de movimiento o campo de velocidades da origen a un flujo, el cual consiste en la "evolución" de los puntos $p(t)$ respecto al tiempo, de tal forma que tengan por velocidad el campo de velocidades considerado. Este flujo en U es el *sistema dinámico,* el cual queda especificado por el campo de velocidades en U. Hay tantos sistemas dinámicos como campos de velocidades. *El destino de un punto consiste en los valores de su evolución* p(t) *para tiempos* t *muy grandes* (que tienden a infinito).

La clave para modelar el movimiento entonces consisten en que un "campo de velocidades" da origen a un "fluir" y con este flujo estamos modelando la evolución temporal de los puntos.

Veamos ahora cómo los sistemas dinámicos contienen de hecho tanta información, que necesitamos deshacernos de gran parte de ella para conservar exclusivamente lo "esencial"

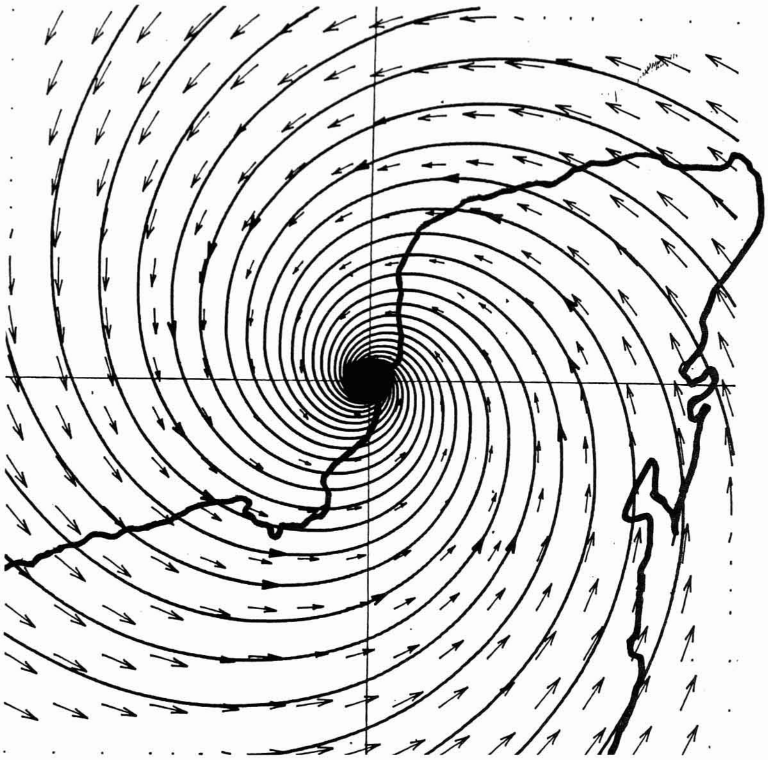

Figura 1. Campo de velocidades y algunas trayectorias del flujo en la península de Yucatán

del movimiento. Para esto, vamos a introducir un punto de vista "cualitativo" en la matemática (¡que es la reina de lo cuantitativo!).

Hay varios hechos sorprendentes que resaltan de un análisis de la figura 1:

1) *Las distintas trayectorias (curvas continuas en la figura 1) no se intersecan.* Es decir, no hay colisiones de trayectorias: dos moléculas, al fluir por la península de Yucatán, nunca van a coincidir en un mismo punto. Este hecho notable resulta válido en general: las trayectorias descritas por un sistema dinámico nunca coinciden en un mismo punto, lo cual constituye un requisito exigido a un modelo acorde con el "determinismo de la ciencia". El conocimiento de la ley de evolución con un determinado condicionante inicial es suficiente para conocer la evolución en todo tiempo. De hecho si dos de aquellas trayectorias se intersecaran, una partícula localizada en tal punto de intersección tendría la opción de seguir cualquiera de las dos, pero ¿quién le ayuda a escoger? Una piedra, al caer por gravedad, no tiene opción: cae y obedece la ley de la gravedad. Nunca duda, nunca tiene oportunidad de escoger. Uno sigue la ley, y punto. Esto es el determinismo de la ciencia y matemáticamente se refleja en el hecho geométrico de que las distintas trayectorias de un sistema dinámico ¡jamás se intersecan!

2) *El sistema dinámico comprende dos partes: la descripción geométrica de las trayectorias del movimiento —las curvas continuas de la figura 1— y el "itinerario" que nos revela en qué parte de la trayectoria nos encontramos en un tiempo* t. La primera información permite saber por dónde va uno a pasar saliendo en una trayectoria determinada y la otra a qué hora ocurrirá. Para acentuar la diferencia entre ambas partes, pensemos que en lugar de un planeador nuestro sistema dinámico representa trenes que van recorriendo unas vías férreas. Según la observación anterior, toda la península de Yucatán está cubierta por "vías férreas" que nunca se intersecan o bifurcan. Por cada vía circula un trenecito con un "itinerario" determinado. El sistema dinámico comprende tanto la descripción geométrica de las vías férreas como la colección de todos los itinerarios de la totalidad de trenes que recorren las distintas vías.

Al darnos cuenta de la riqueza de la información contenida en la figura 1 —vías, itinerarios,...— y al observar la imagen, advertimos que la información "esencial" consiste en que todas las vías férreas tienen como destino final la "Estación central ojo del huracán". La información esencial del sistema dinámico de la figura 1 la constituye el hecho de que todas las trayectorias tienden al único "punto de equilibrio" del sistema.

La primera simplificación en que puede incurrirse consiste en ignorar los "itinerarios" de los trenes y sólo considerar las vías. Esta pérdida de los itinerarios más bien nos aligera la tarea de describir el sistema dinámico, pues uno sólo se interesa en comprender el papel de cada vía férrea, la diferencia de cada una respecto a las otras y el modo en que todas ellas en conjunto forman la totalidad de *U.* Éste es un *problema geométrico de cómo las vías de tren descomponen el espacio* U *donde está definido el sistema dinámico.* En este punto conviene recordar la aportación del matemático francés Henri Poincaré (1854-1912), quien introdujo el enfoque cualitativo al afirmar que tan sólo interesa ver la descomposición por vías férreas como las ve un topólogo y no como las considera un geómetra. *En el mundo del topólogo el espacio* U *y sus vías férreas pueden deformarse como si fueran de un material elástico, pero no se pueden romper, rasgar o pegar.*

Por ejemplo, el sistema dinámico de la figura 1 es "cualitativamente equivalente" a cualquier otro en el cual haya tan sólo una "estación central" y todas las vías concluyan al llegar a esa terminal. Para un topólogo la única información relevante es que las vías tienden a ir a la estación y no le interesa saber la localización precisa de las vías, cómo se están doblando y mucho menos el itinerario del trenecito que viaja sobre ellas.

Una propiedad de un sistema dinámico definido en U *por el campo de velocidades* v *es persistente si aquélla es válida para los sistemas dinámicos obtenidos en campos de velocidades cercanos a* v. Propiedades no persistentes resultan muy difíciles de observar en la naturaleza debido a que pequeñas variaciones del sistema las hacen desaparecer. *Observamos tan sólo lo persistente.*

Comprender cualitativamente un sistema dinámico consiste en comprender la imagen del espacio *U* y su descomposición en vías férreas desde la perspectiva de un topólogo, en un mundo elástico. Dos sistemas dinámicos son *cualitativamente el mismo* si sus vías férreas resultan topológicamente en la misma descomposición del espacio *U*. *Un sistema dinámico es estructuralmente estable si su descomposición cualitativa en vías férreas es persistente, es decir si para todo campo de velocidades* v' *cercano a* v *las dos descomposiciones en vías férreas son cualitativamente la misma (topológicamente, en un mundo elástico)*. En este caso, la estructura de las vías férreas es tan fuerte, hay tanta cohesión entre todas ellas, que ligeras perturbaciones en el campo de velocidades no rompen estructura tan fuerte.

Por ejemplo, la figura 1 representa un campo estructuralmente estable, pues un atractor como el dibujado sólo puede deformarse en otro atractor global. Es decir: un huracán no desaparece, tal vez se mueva el ojo, pero para desaparecer primero tiene que disminuir su intensidad.

Decimos que un sistema dinámico definido en el espacio *U fluye con orden si es estructuralmente estable y podemos dividir* U *en un número finito de piezas, de tal forma que el destino de los puntos de cada pieza sea el mismo*. Es decir, sólo hay un número finito de "destinos" —puntos de equilibrio y movimientos periódicos— a los cuales tienden todas las otras vías y esta partición es persistente ante pequeñas perturbaciones del campo de velocidades. La clasificación cualitativa de estos sistemas se reduce a data combinatoria finita y es posible considerarlos como "bien entendidos".

Si la dimensión del espacio *U* es 2, entonces los sistemas dinámicos que fluyen con orden son casi todos; sin embargo, a partir de dimensión 3 ya hay sistemas tales que ninguna pequeña perturbación fluye con orden. *¿Cómo será un sistema estructuralmente estable que no fluya con orden? ¡Ha de tener una dinámica complicada e indestructible!*

2. *Sistemas dinámicos caóticos*

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos compatibles con el "determinismo de la ciencia" y sorprende que aparezca aquí la palabra caos. ¿Cómo entró el caos en la matematización misma del determinismo de la ciencia? *La razón de la presencia del caos es que el tiempo es infinito.*

Considerado un sistema dinámico definido en el espacio *U*, una zona *Z* de *U* tiene *dinámica caótica si el destino de los puntos que la constituye es muy sensible a la condición de partida y hay una abundancia de diferentes destinos.* La primera condición puede expresarse diciendo que "*no hay compañerismo en* Z", *es decir, dados dos puntos en* Z, *sin importar cuán cercanos resulten, en un momento de su evolución se separan una magnitud macroscópica.* La combinación de falta de compañerismo y abundancia de destinos claramente justifica el nombre de caos. En los sistemas con orden de la sección anterior no hay caos, pues tan sólo hay un número finito de diferentes destinos.

La dinámica caótica en Z *es persistente si al perturbar ligeramente el campo de direcciones* v *que define la dinámica a* v' *hay un subconjunto* Z' *donde la dinámica de* v' *es cualitativamente la misma que la de* Z. El caos persistente es el que observamos en la naturaleza, pues el caos no persistente no vive suficiente tiempo como para ser susceptible de visualización.

El siguiente sistema dinámico con caos persistente es el más sencillo posible. Para tratar de simplificarlo al máximo, presentaremos como ejemplo un sistema dinámico con tiempo discreto, y no con tiempo continuo, como hemos explicado hasta ahora. Esto quiere decir que, en lugar de que el tren efectúe su recorrido con tiempo continuo, tiene paradas cada determinado tiempo. *La ley de evolución ahora es una función* f: U →U *que señala cuál es el punto donde* p *se transforma en* f(p) *después de un proceso de evolución. La dinámica se obtiene al aplicar repetidas veces la* f, *en un proceso que denominamos "iterar". El "destino" de un punto* p *es su evolución en tiempos muy grandes —tendiendo a infinito.*

Lo único que vamos a necesitar de las matemáticas es el concepto de que "todo número tiene expansión decimal". Sea $I = [0,1]$ el segmento en los números reales que se encuentran entre 0 y 1. Los puntos de I los podemos representar en su expansión decimal $0.a_1a_2a_3a_4...$, donde cada a_* es un dígito 0,1,...,9. Dos números en I están cercanos si en su expansión los primeros dígitos son iguales. La cola de un número consiste en los últimos dígitos de la expansión. Claramente podemos encontrar puntos muy cercanos que tengan colas muy distintas: coinciden en su primer millón de dígitos y luego las expansiones son radicalmente distintas. En el ejemplo que vamos a dar, el destino de un punto aparece determinado por su cola, así que va a haber por todos lados puntos que comparten el mismo destino —tienen la misma cola, pero los primeros dígitos son distintos— y, a la vez, puntos cercanos tendrán destinos completamente distintos —coinciden en los primeros dígitos y no en la cola—. Claramente hay un verdadero caos en la evolución de este sistema, pues medimos cercanía por los primeros dígitos y el destino por la cola de la expansión.

Nuestro ejemplo se apega a la ley de evolución $f: I \rightarrow I$ definida por

$$f(0.a_1a_2a_3a_4...) = 0.a_2a_3a_4a_5...$$

Es decir, que en la expansión decimal eliminamos el primer término, recorriendo todo lo demás. Es fácil ver que los puntos [0, 0.1] entre 0 y 0.1, cuando les aplicamos f, cubren todo el intervalo I —pues se obtienen de nuevo todas las expansiones en decimales—. De modo parecido, cualquier intervalo de la forma [0.5, 0.6] pues al eliminar el primer término —en este caso el 5— volvemos a obtener todas las expansiones decimales. Entonces, esta función f cubre 10 veces el segmento I. La transformación nos la podemos imaginar así: expandimos el intervalo [0, 1] por 10, para obtener el intervalo [0, 10] y ahora recubri-

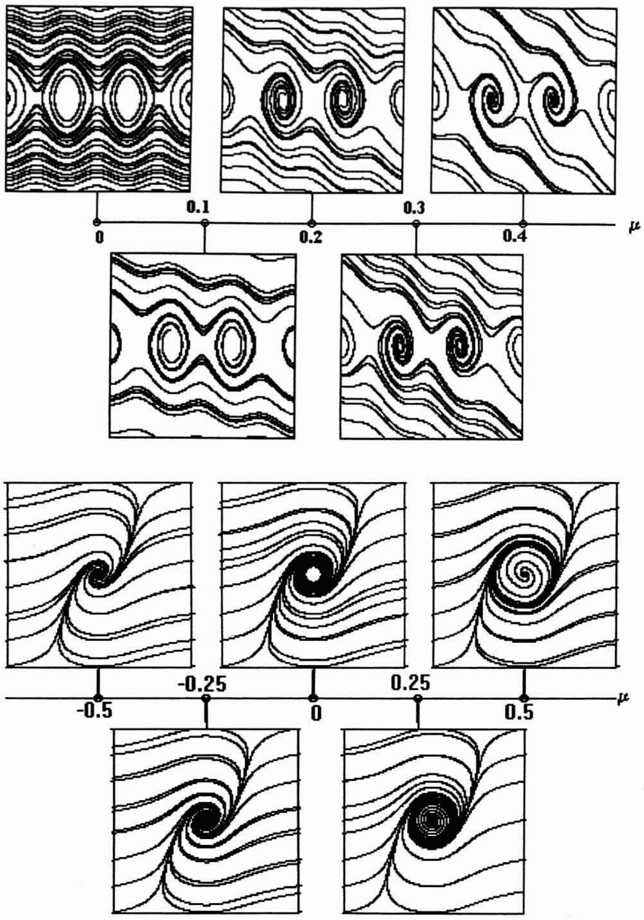

Figura 2. Cambios de tipo cualitativo en sistemas dinámicos, producidos por pequeñas perturbaciones

mos con [0, 10] 10 veces el intervalo original [0, 1] al "ignorar" el primer dígito.

Teorema: el sistema dinámico f *tiene caos persistente en* I.

Como el proceso consiste en eliminar el primer término cada vez, entonces lo que está determinando el destino es la cola de la expansión. Por ejemplo los números

$$0.47234777777777777777...,$$
$$0.29573777777777777777...$$

tienen el mismo destino, dado que tienen la misma cola. Nótese que si nos dan un número x podemos construir uno z con la misma expansión decimal que x en el primer millón de dígitos, y luego le ponemos la cola que sea. Este punto se encuentra extremadamente cerca de x y sin embargo su destino al iterar f un millón de veces ya no tiene nada que ver con el que tenía x. Hay puntos arbitrariamente cercanos que terminan por tener un destino completamente distinto del destino del punto original.

No es difícil verificar que aquí no hay compañerismo, pues si tenemos dos puntos distintos en I entonces hay una primera vez donde su expansión difiere. Iterando para que desaparezcan los primeros términos iguales podemos lograr "separarlos" una cantidad macroscópica (al menos 0.01).

Se observa asimismo que si tengo un punto cuya expansión es eventualmente periódica, digamos 0.2783235235235235..., donde el periodo 235 se repite al infinito, da origen a un punto periódico de periodo 3 del sistema dinámico:

$$x_0 = 0.235235235235... \qquad f \circ f \circ f(x_0) = x_0$$

Así, si nos dan un punto arbitrario x en I, podemos construir uno y con la misma expansión en el primer millón de dígitos, y después le ponemos de cola uno periódico cualquiera que se repita indefinidamente. Eso quiere decir que hay puntos periódicos de periodo arbitrario y arbitrariamente cerca de cualquier punto x.

Si imprimimos una pequeña perturbación al sistema dinámico f, obtenemos otro sistema dinámico al iterar una función g cercana a f. No resulta difícil comprobar que ambas son cualitativamente iguales, debido a que f es expansiva —todo lo expande por 10—. Esta expansividad también la hereda g y mediante ella misma podemos hacer un código para g parecido al código decimal que usamos para f. Se ve que los dos códigos son el mismo y con ello se prueba la equivalencia cualitativa de f y g.

En este ejemplo también queda claro por qué en las aproximaciones —como en una computadora— ya se puede ver el caos: si sólo consideramos la expansión en los primeros mil dígitos y decimos que la cola son los últimos cien, ya vemos la falta de compañerismo. Es decir, puntos cercanos comparten destinos muy distintos. Las computadoras nos han hecho accesibles las iteraciones de mil veces y, por consiguiente, nos han permitido ver claramente el caos no sólo en este caso, sino también en muchos otros.

Los invito a convencerse del caos persistente del ejemplo y, luego, a tratar de encontrar el caos en su quehacer diario. Los experimentalistas aseguran que hay más caos de lo que nos imaginamos, que se encuentra por todos lados...

Algunos detalles más de lo aquí expuesto se pueden encontrar en la siguiente bibliografía. ◆

Bibliografía

Gómez-Mont, Xavier, "Bifurcación y caos en sistemas dinámicos del plano complejo", en *Revista Mexicana de Física*, 31, 1985, pp. 465-487.

—, *Un enfoque a los sistemas dinámicos: la computación convierte a la matemática en ciencia experimental*, Academia de la Investigación Científica, México, 1989, pp. 233-243.

— y L. Ortiz-Bobadilla, "Order and Chaos in Dynamical Systems", en *Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, G. Martínez-Mekler y T. Seligman (eds.), World Scientific Series on Non-linear Science, series B, vol. 6, 1995, pp. 1-24.

Palis, J., y W. Mello, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer Verlag, Nueva York, 1982.